۱۷.مقاطع مخروطی

@tmrnazari
@mrnazari

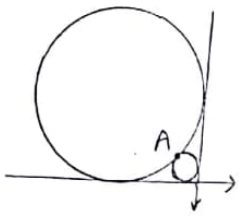
Scanned by CamScanner

« ۱۷- مقاطع مخروطی »

۱- دایره‌ای از نقطه $A(۲,۱-)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. مقدار دایره بزرگ‌تر کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

دایره‌ای که بر دو محور مختصات مماس باشد (در ناحیه‌ی دوم) دارای شعاع $r=\alpha$ خواهد بود. پس:



معادله‌ی دایره: $(x+\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=\alpha^۲ \xrightarrow{(-۱,۲)} (-۱+\alpha)^۲+(۲-\alpha)^۲=\alpha^۲$

$\longrightarrow ۱+\alpha^۲-۲\alpha+۴-۴\alpha+\alpha^۲=\alpha^۲ \longrightarrow \alpha^۲-۶\alpha+۵=۰ \begin{cases}\alpha=۱\\ \alpha=۵\end{cases}$

مقدار دایره بزرگ‌تر: $r=۲\alpha=۱۰ \times ۵=۱۰$

۲- در بیضی به معادله‌ی $۳x^۲+۴y^۲=۱۲$ یک خط از کانون بر قطر بزرگ آن عمود می‌کنیم، تا بیضی را در A و B قطع کند. اندازه‌ی AB کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

$\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۳}=۱ \longrightarrow \frac{۲b^۲}{a}=\frac{۲\times ۳}{۲}=۳$

۳- شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(۲,۱)$ و $(۴,۱-)$ و $(۰,۰)$ می‌گذرد کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۲٫۵ ۳) ۳ ۴) ۳٫۵

معادله‌ی این دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض این دایره از سه نقطه‌ی $(۰,۰)$ و $(۴,۱-)$ و $(۲,۱)$ می‌گذرد. پس مختصات آن‌ها در معادله‌ی دایره صدق می‌کند:

$(۰,۰) \longrightarrow (۰)^۲+(۰)^۲+a(۰)+b(۰)+c=۰ \longrightarrow c=۰$

$(-۱,۴) \longrightarrow (-۱)^۲+۴^۲+a(-۱)+b(۴)+c=۰ \longrightarrow ۱۷-a+۴b=۰$ ⊛

$(۲,۱) \longrightarrow ۲^۲+۱^۲+a(۲)+b(۱)+c=۰ \longrightarrow ۵+۲a+b=۰$ ⊛⊛

⊛ و ⊛⊛ $\longrightarrow \begin{array}{l}۱۷-a+۴b=۰\\ +\ \ ۵+۲a+b=۰\end{array}$

$۲۲+۵b=۰ \longrightarrow b=-۵ \xrightarrow{⊛⊛} a=۰$

معادله‌ی دایره: $x^۲+y^۲-۵y=۰ \longrightarrow x^۲+(y-\frac{۵}{۲})^۲-\frac{۲۵}{۴}=۰ \longrightarrow x^۲+(y-\frac{۵}{۲})^۲=\frac{۲۵}{۴} \rightarrow R=\frac{۲۵}{۴}=۲$

۴- در هذلولی به معادله‌ی $x^۲-۳y^۲-۲x=۲$ اندازه‌ی وتر گذرنده بر کانون و عمود بر محور طولی آن کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۳}$

Scanned by CamScanner

می‌دانیم که در هذلولی طول وتری که از کانون گذشته و بر محور کانونی عمود است (وتر کانونی) برابر با $\frac{2b^2}{a}$ است.

$x^2-3y^2-2x=4 \longrightarrow (x^2-2x)-3y^2=4 \longrightarrow ((x-1)^2-1)-3y^2=4 \longrightarrow (x-1)^2-3y^2=1^2$

$\xrightarrow{\div 3} \frac{(x-1)^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1 \rightarrow \begin{cases} a^2=3 \longrightarrow a=\sqrt{3} \\ b^2=1 \end{cases}$

طول وتر کانونی $= \frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

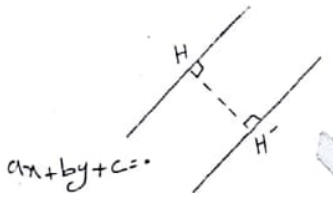
۵- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $3=2x-2y$ و $y=x+1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟ (خرداد ۹۲)

۱) $\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{25}{8}$ ✓ ۴) $\frac{25}{4}$

موازی بودن معادله‌ی دو خط داده شده حواری است. در نتیجه معادله‌ی دو ضلع مقابل یک مربع است. فاصله‌ی این دو خط موازی را برابر با اندازه‌ی طول ضلع این مربع است. پس داریم:

$y=x+1 \xrightarrow{\times 2} 2x-2y+2=0$

$2x-2y=3 \rightarrow 2x-2y-3=0$



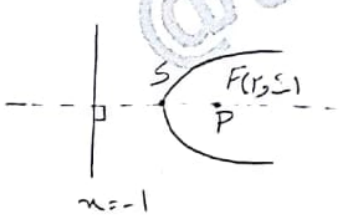
$HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2-(-3)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{8}}$

$S_{\text{مربع}}=a^2=\frac{25}{8}$

۶- سهمی به کانون $F(2,4)$ و خط هادی به معادله‌ی $x=-1$، محور $xها$ را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خرداد ۹۲)

۱) $\frac{17}{6}$ ۲) $\frac{19}{6}$ ✓ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$

چون F روی خط هادی است، پس رأس سهمی وسط پاره‌خط است. داریم:



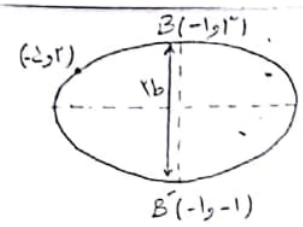
$\begin{cases} x_S=\frac{x_{\text{خط هادی}}+x_F}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2} \\ y_S=y_F=4 \end{cases} \longrightarrow S(\frac{1}{2},4)$

معادله‌ی سهمی $\longrightarrow (y-\beta)^2=4p(x-\alpha) \longrightarrow (y-4)^2=4(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) \xrightarrow[\text{محل تلاقی با محور } xها]{y=0} 16=6x-3 \rightarrow x=\frac{19}{6}$

۷- معادلات دو سهمی متقارن کوچک به کانون‌های $(3,-1)$ و $(-1,-1)$ است. این دو سهمی از نقطه‌ی $(2,-4)$ می‌گذرند. خروج از مرکز آن کدام است؟ (خرداد ۹۴)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Scanned by CamScanner



چون دو سر قطر کوچک بیضی هم طول هستند در نتیجه بیضی افقی است. داریم:

$$BB' = 2b = 4 \rightarrow b = 2 \qquad O = \frac{B+B'}{2} = (-1, 1)$$

اکنون معادله‌ی بیضی را نوشته تا بتوانیم به ازای نقطه‌ی $(0, -4)$ روی آن مقدار a^2 را به دست آوریم:

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \xrightarrow[\text{روی بیضی}]{(0,-4)} \frac{1}{a^2} + \frac{25}{4} = 1 \rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{3}{4} \rightarrow a^2 = 12$$

$$\text{خروج از مرکز} = e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{12}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۸- شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه $(0,0)$ و $(1,2)$ و $(2,-1)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \begin{cases} \xrightarrow[\text{راه‌حل سریع‌تر}]{(0,0)} c=0 \\ \xrightarrow[\text{راه‌حل معمولی}]{(1,2)} 5+1+2a+b=0 \\ \xrightarrow[\text{راه‌حل معمولی}]{(2,-1)} 1+4+a-2b=0 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4a+2b=-10 \\ a-2b=-5 \end{cases} \xrightarrow{+} 5a=-15 \quad a=-3$$

$$a=-3 \xrightarrow{\text{صدق در معادله‌ی ①}} 5(-3)+2b=-10 \rightarrow 2b=2 \rightarrow b=1$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و b و c شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(1)^2-4(0)} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

۹- در هذلولی به معادله $3x^2-4y^2-6x-9=0$ طول وتری از آن گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{7}$ ۳) ۳ ۴) $2\sqrt{3}$

$$3x^2-4y^2-6x-9=0 \rightarrow 3(\underbrace{x^2-2x}_{(x-1)^2-1})-4y^2-9=0 \rightarrow 3(x-1)^2-4y^2=12 \xrightarrow{\div 12}$$

$$\frac{(x-1)^2}{\underbrace{4}_{a^2}} - \frac{y^2}{\underbrace{3}_{b^2}} = 1 \qquad \text{طول وتر کانونی} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)}{2} = 3$$

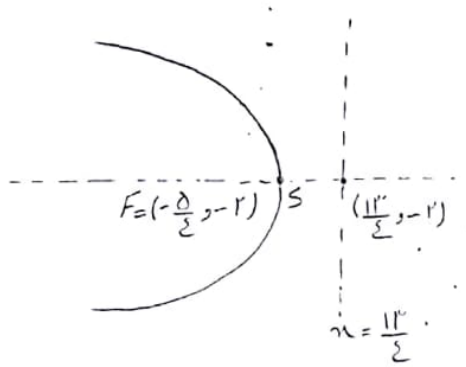
۱۰- خط هادی یک سهمی به معادله‌ی $x = \frac{13}{4}$ است. هر وتری که از نقطه $(2, -\frac{5}{4})$ بر این سهمی بتابد، در امتداد محور xها بازمی‌تابد. این سهمی محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی ۹۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{4}{5}$

هادی سهمی یک خط تمام است. سر سهمی انتهایی است. ولی وتری از آن که بر سهمی عمود است بر سهمی بتابد موازی محور سهمی بازتابیده می‌شود و برعکس. بنابراین نقطه $(2, -\frac{5}{4})$ کانون سهمی می‌باشد.

@tmrnazari@mrnazari

Scanned by CamScanner



$$S=\frac{(-\frac{5}{4},-2)+(\frac{11}{4},-2)}{2}=(1,-2)=(\alpha,\beta)$$

$$p=SF=1-(-\frac{5}{4})=\frac{9}{4}\longrightarrow (y-\beta)^2=-4p(x-\alpha)$$

$$(y+2)^2=-9(x-1)\xrightarrow{y=0}4=-9(x-1)\longrightarrow x-1=-\frac{4}{9}$$

$$x=\frac{5}{9}$$

۱۱- هذلولی به معادله $5y^2-4x^2-20y=0$ مفروض است. معادله‌ی یکی سهمی‌هایی که کانون‌های آن منطبق بر رأس‌های هذلولی و رأس‌های آن در کانون‌های این هذلولی باشد، کدام است؟ (خرداد ۹۴)

۱) $5y^2+9x^2-20y=25$ ۲) $5y^2+9x^2-10y=36$

۳) $4y^2+5x^2-12y=4$ ۴) $9y^2+5x^2-36y=9$

$$5(y^2-4y)-4x^2=0\longrightarrow 5\left((y-2)^2-4\right)-4x^2=0\longrightarrow 5(y-2)^2-4x^2=20\longrightarrow$$

$$\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1\longrightarrow \text{هذلولی قائم}$$

$$(\alpha,\beta)=(0,2),\ a^2=4\ و\ b^2=5,\ c^2=a^2+b^2=9\longrightarrow c=3$$

$$\begin{cases}\text{کانون‌ها}: (\alpha,\beta\pm c)=(0,2\pm3)=(0,-1)\ و\ (0,5)\\ \text{رأس‌ها}: (\alpha,\beta\pm a)=(0,2\pm2)=(0,0)\ و\ (0,4)\end{cases}$$

پس کانون‌های سهمی به صورت $F=(0,0)$ و $F'=(0,4)$ و رأس‌های آن به صورت $A=(0,-1)$ و $A'=(0,5)$ هستند. واضح است که سهمی قائم است.

$$(\alpha,\beta)=\frac{F+F'}{2}=(0,2)\qquad a=\frac{AA'}{2}=\frac{6}{2}=3\qquad c=\frac{FF'}{2}=\frac{4}{2}=2\qquad b^2=a^2-c^2=9-4=5$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1\longrightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{9}=1\longrightarrow 9x^2+5(y-2)^2=45\longrightarrow 9x^2+5y^2-20y+20=0$$

$$9x^2+5y^2-20y=25$$

۱۲- دایره‌ای به مرکز $(1,-2)$ و مماس بر خط به معادله $x-y=1$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خرداد ۹۵)

۱) ۱ و ۳ ۲) ۱ و ۴ ۳) ۲ و ۳ ۴) ۱/۵ و ۴

وقتی خط بر دایره مماس باشد شعاع دایره برابر است با فاصله‌ی مرکز دایره تا این خط:

$$R=d=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{2-(-1)-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\longrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=2\longrightarrow$$

$$(x-2)^2+(0+1)^2=2\longrightarrow (x-2)^2=1\longrightarrow x-2=\pm1\longrightarrow x=2\pm1=1\ و\ 3$$

Scanned by CamScanner

۱۳- به ازای کدام مقدار k، خروج از مرکز هذلولی به معادله $kx^2 - 2y^2 + 4y = 4$ برابر $\sqrt{3}$ است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$kx^2 - 2(y^2 - 2y + 1 - 1) = 4 \longrightarrow kx^2 - 2\left((y-1)^2 - 1\right) = 4 \longrightarrow kx^2 - 2(y-1)^2 + 2 = 4$$

$$\longrightarrow 2(y-1)^2 - kx^2 = 2 \longrightarrow \frac{(y-1)^2}{1} - \frac{x^2}{\frac{2}{k}} = 1 \longrightarrow a^2 = 1,\ b^2 = \frac{2}{k},\ \frac{c}{a} = \sqrt{3} \longrightarrow$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \longrightarrow c = a\sqrt{3} \longrightarrow 1 + \frac{2}{k} = 3a^2 = 3 \longrightarrow \frac{2}{k} = 2 \longrightarrow k = 1$$

۱۴- دایره‌ای از دو نقطه $A(0,0)$ و $B(3,0)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادله‌ی $x - y = 2$ قرار دارد، بنابراین می‌توانیم مختصات مرکز آن را به صورت $\omega(\beta+2, \beta)$ در نظر بگیریم. از طرفی مرکز دایره از هر نقطه‌ی دلخواه واقع بر آن به یک فاصله است. پس دو نقطه‌ی $A(0,0)$ و $B(3,0)$ بر این دایره واقعند. پس:

$$R = \omega A = \omega B \longrightarrow \sqrt{(\beta+2-0)^2 + (\beta-1)^2} = \sqrt{(\beta+2-3)^2 + (\beta-0)^2} \longrightarrow$$

$$(\beta+2)^2 + (\beta-1)^2 = (\beta-1)^2 + \beta^2 \longrightarrow (\beta+2)^2 = \beta^2 \longrightarrow \beta^2 + 4\beta + 4 = \beta^2 \longrightarrow$$

$$4\beta + 4 = 0 \longrightarrow \beta = -1$$

$$\longrightarrow R = \sqrt{(-1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5}$$

۱۵- مساحت محدود به خطوط مماس بر مخروطی به معادله‌ی $x^2 + 4y^2 - 4x = 4$ در هر رأس کانونی آن کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲√۲ ۴) ۱۸

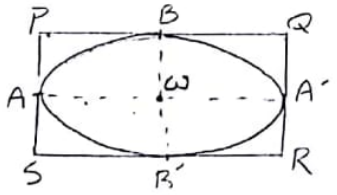
$$x^2 + 4y^2 - 4x = 4 \longrightarrow (x^2 - 4x) + 4y^2 = 4 \longrightarrow (x-2)^2 - 4 + 4y^2 = 4 \longrightarrow$$

$$(x-2)^2 + 4y^2 = 8 \xrightarrow{\div 8} \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

معادله‌ی اخیر نشان می‌دهد که مخروط مورد نظر یک بیضی با اطلاعات زیر است و در آن با توجه به شکل فرضی زیر:

$$\begin{cases} a^2 = 8 \longrightarrow a = 2\sqrt{2} \\ b^2 = 2 \longrightarrow b = \sqrt{2} \end{cases}$$

مساحت مستطیل $PQRS$ مورد سؤال است:



$$\begin{cases} PS = BB' = 2b = 2\sqrt{2} \\ PQ = AA' = 2a = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow S(PQRS) = PS \times PQ = (2\sqrt{2}) \times (4\sqrt{2}) =$$

Scanned by CamScanner

۱۶- بازای کدام مقادیر m خط به معادله‌ی $y=mx+2$ بر دایره به معادله‌ی $x^2+y^2-2x=3$ مماس است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $-\frac{4}{3}$ و صفر ✓۲) $\frac{4}{3}$ و صفر ۳) $-\frac{2}{3}$ و ۱ ۴) $-\frac{2}{3}$ و ۱، ۰

ابتدا مرکز و شعاع دایره را از خط مماس برابر شعاع دایره می‌یابیم:

$x^2+y^2-2x-2=0 \longrightarrow$ مرکز دایره $= O(1,0)$

شعاع دایره $= R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2-4(-3)}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$

$mx-y+2=0$ فاصله‌ی مرکز دایره از خط $= OH=\frac{|m-0+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$

$$OH=R \longrightarrow \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \longrightarrow (m+2)^2=4(m^2+1) \longrightarrow 3m^2-4m=0 \longrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\frac{4}{3} \end{cases}$$

۱۷- خروج از مرکز هذلولی به معادله‌ی $x^2-2ax-\frac{1}{2}y^2=1$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $\sqrt{2}$ ✓ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{1+a^2}$

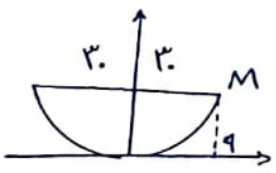
ابتدا معادله‌ی هذلولی را استاندارد می‌کنیم:

$$x^2-2ax-\frac{1}{2}y^2=1 \longrightarrow (x-a)^2-\frac{1}{2}y^2=a^2+1 \xrightarrow{\div(a^2+1)} \underbrace{\frac{(x-a)^2}{a^2+1}}_{a^2}-\frac{y^2}{\underbrace{2(a^2+1)}_{b^2}}=1$$

$$\text{خروج از مرکز}=e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{2(a^2+1)}{a^2+1}}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$$

۱۸- عمق یک آینه‌ی سهمی در مرز آن ۹ واحد و فاصله‌ی کانون تا رأس آن ۶ واحد است. فاصله‌ی کانون تا رأس آن کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲٫۵ ✓۴) ۲۵



با توجه به شکل سهمی M (۳۰ و ۹) روی سهمی به معادله‌ی $x^2=4py$ است داریم:

$$x^2=4py \longrightarrow (30)^2=4p\times 9 \longrightarrow p=25$$

۱۹- مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی $(2,3)$ و $(2,-3)$ و خروج از مرکز آن $\frac{1}{2}$ می‌باشد. این بیضی محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $-1,5$ ۲) $-1,7$ ✓۳) $0,6$ ۴) $1,5$

محمدرضا نظری @mrnazari

Scanned by CamScanner

طول این دوره‌ای که مانند برابر است با $\frac{1}{8}$ فاصله بین این دو نقطه. فاصله بین این دو نقطه 8 واحد است پس $\frac{1}{8}$ است:

$$(1,-2),(1,6) \longrightarrow O(1,2) \quad ; \quad 2a=8 \longrightarrow a=4 \quad ; \quad e=\frac{c}{a} \longrightarrow \frac{1}{2}=\frac{c}{4} \longrightarrow c=2$$

$$b^2=a^2-c^2=16-4=12$$

$$\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(x-1)^2}{12}=1 \xrightarrow{y=0} \frac{4}{16}+\frac{(x-1)^2}{12}=1 \longrightarrow \frac{(x-1)^2}{12}=\frac{3}{4} \longrightarrow (x-1)^2=9 \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$$

۲۰- شعاع دایره به مرکز $(2,-1)$ و مماس خارج بر دایره $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ✓ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴

آگر دو دایره‌ی C و C' به شعاع‌های R و R' و طول خط المرکزین d نسبت به هم مماس خارج باشند، حتماً $d=R+R'$ است.

دایره‌ی C' به مرکز $O(-1,2)$ بوده و بر دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ یعنی C: مرکز $O'(1,-2)$ و شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=3$ مماس است.

$$d=OO'=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

پس داریم:

$$d=R+R' \longrightarrow 5=R+3 \longrightarrow R=2$$

۲۱- قدر مطلق تفاضل نقطه متحرک $M(x,y)$ از دو نقطه ثابت $(-4,2)$ و $(2,6)$ همواره برابر ۶ واحد است. این متحرک با کدام یک از خط‌های به معادله $x=5$ برخورد می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) $1\pm\frac{15}{4}$ ✓ ۲) $1\pm4\sqrt{2}$ ۳) $2\pm\frac{15}{4}$ ۴) $2\pm3\sqrt{2}$

مکان هندسی نقطه‌ی M، هذلولی به کانون‌های $F(2,6)$ و $F'(2,-4)$ است که در آن $2a=6$ می‌باشد. داریم:

$$F(2,6),F'(2,-4) \longrightarrow \begin{cases} \text{هذلولی قائم است} \longrightarrow \text{دو کانون هم‌طول‌اند} \\ \text{مرکز} = O = \frac{F+F'}{2}=(2,1) \\ 2c=|y_F-y_{F'}|=|6-(-4)|=10 \longrightarrow c=5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه‌ی سه‌تایی}} b^2=c^2-a^2 \longrightarrow b^2=25-9=16$$

حال با معادل بودن نوع هذلولی، مرکز و مقادیر a^2 و b^2 معادله‌ی هذلولی را می‌نویسیم:

$$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1 \longleftarrow \text{معادله‌ی هذلولی}$$

حال مختصات نقاط برخورد خط $x=5$ با این هذلولی را محاسبه می‌کنیم:

$$x=5 \longrightarrow \frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(5-2)^2}{16}=1 \longrightarrow \frac{(y-1)^2}{9}=\frac{25}{16} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \frac{|y-1|}{3}=\frac{5}{4} \longrightarrow |y-1|=\frac{15}{4}$$

$$y-1=\pm\frac{15}{4} \longrightarrow y=1\pm\frac{15}{4}$$

Scanned by CamScanner

۲۲- نقطه‌ی $(-۱ و -۱/۶)$ S رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور xها بر این سهمی بتابد به نقطه‌ی $(-۱ و ۰/۹)$ بازمی‌تابد. این سهمی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $-۶/۴$ ✓ ۲) $-۵/۳$ ۳) $-۴/۲$ ۴) $-۲/۰$

طبق خاصیت بازتابندگی سهمی‌ها، پرتوی که به موازات محور تقارن سهمی بتابد در راستای آن از کانون می‌گذرد. بنابراین کمترین فاصله‌ی نقطه‌ی رأس آن $(-۱ و -۱/۶) = S$ تا کانون آن $(-۱ و ۰/۹) = F$ و فاصله‌ی کانون تا رأس آن $P = ۰/۹ - (-۱/۶) = ۲/۵$ است.

معادله‌ی سهمی به این صورت است: $(y-(-۱))^۲ = ۴p(x-(-۱/۶)) \rightarrow (y+۱)^۲ = ۱۰(x+۱/۶)$

تقاطع این سهمی با محور yها با قرار دادن $x=۰$ در معادله‌ی سهمی به دست می‌آید:

$$(y+۱)^۲ = ۱۰(۰+۱/۶) \rightarrow (y+۱)^۲ = ۱۶ \rightarrow y = ۳ \text{ و } -۵$$

۲۳- بیضی به معادله‌ی $x^۲ + ۴y^۲ + ay + bx + c = ۰$ در نقطه‌ی به طول ۳ بر محور xها مماس است و از نقطه‌ی $(۲ - و - ۱)$ می‌گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ✓ ۴) $\frac{۳}{۴}$

خروج از مرکز بیضی‌ای که به فرم $Ax^۲ + By^۲ + Cx + Dy + E = ۰$ را دارد، از رابطه‌ی $e = \sqrt{۱ - \frac{\min\{A,B\}}{\max\{A,B\}}}$ می‌توان محاسبه نمود.

$$e = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۴- دایره‌ای محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند و مرکز آن بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ✓ ۴) ۳

۱) نامعادله‌ی هر نقطه‌ی روی دایره از مرکز آن برابر شعاع دایره است.

۲) معادله‌ی نیمساز ربع اول عبارت است از $y = x$ با شرط $x > ۰$ و $y > ۰$

پس مختصات مرکز دایره به صورت (a, a) است که $a > ۰$. با نامعادله‌ی دو نقطه‌ی $(۳, ۰)$ و $(۱, ۰)$ از مرکز دایره برابر شعاع دایره است.

@tmrnazari tmrnazari@gmail.com

Scanned by CamScanner

$R = \sqrt{(x-3)^2 + x^2} = \sqrt{(x-1)^2 + x^2} \longrightarrow (x-3)^2 + x^2 = (x-1)^2 + x^2 \longrightarrow (x-3)^2 = (x-1)^2$

$|x-3| = |x-1| \longrightarrow x-3 = \pm(x-1) \longrightarrow \begin{cases} x-3 = x-1 \longrightarrow -3 = -1 \text{ غ ق ق} \\ x-3 = -(x-1) \longrightarrow 2x = 4 \longrightarrow x = 2 \end{cases}$

$R = \sqrt{(x-1)^2 + x^2} = \sqrt{(1-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

۲۵- در یک هذلولی افقی معادلهای مجانب ها به صورت $y = 2x - 4$ و $y = -2x$ می باشند. خروج از مرکز این هذلولی کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{5}$ ✓

شیب مجانب ها با توجه به صورت سوال ± 2 است. پس $\frac{b}{a} = 2$

$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2+(2a)^2}}{a} = \frac{\sqrt{5a^2}}{a} = \sqrt{5}$

۲۶- نقطه‌ی $A(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله‌ی $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰ ✓

چون نقطه‌ی A وسط قطر مربع است فاصله‌ی نقطه‌ی A تا روی مربع می باشد پس فاصله‌ی آن از یکی از اضلاع برابر نصف طول این مربع است.

$2y - x = 5 \longrightarrow x - 2y + 5 = 0$

$AH = \frac{a}{2} = \frac{|3+2+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \longrightarrow a = \frac{20}{\sqrt{5}} \longrightarrow S_{\text{مربع}} = a^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$

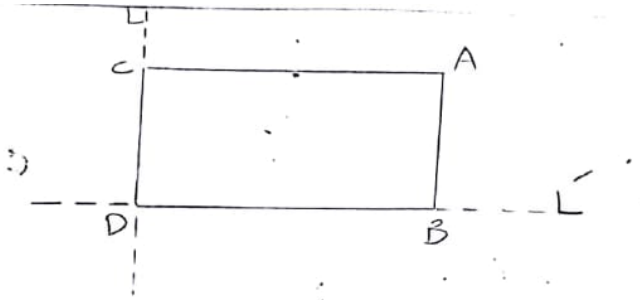
۲۷- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(5,8)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) ۷/۲ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۱/۴ ۴) ۱۲/۸

ابتدا توجه کنید که حاصل ضرب شیب های دو خط $L: 2y + x - 6 = 0$ و $L': 2x - y - 7 = 0$ برابر (-1) است. پس این دو خط بر هم عمود و در نتیجه امتداد اضلاع مستطیل می باشند. $A(5,8)$ در معادله‌ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی کند. پس می توان

Scanned by CamScanner

شکل زیر را برای مسأله در نظر بگیرید :



با توجه به شکل برای یافتن طول اضلاع این مستطیل باید
ابتدا رئوس مستطیل A را از دو خط داده شده به دست آوریم :

$$AB = \frac{|1\times 8 - 5 - 7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad AC = \frac{|1(5)+8-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

$$S_{(ABDC)} = AB \times AC = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9,2$$

محمد رضا نظری
@tmrnazari@mrnazari

Scanned by CamScanner